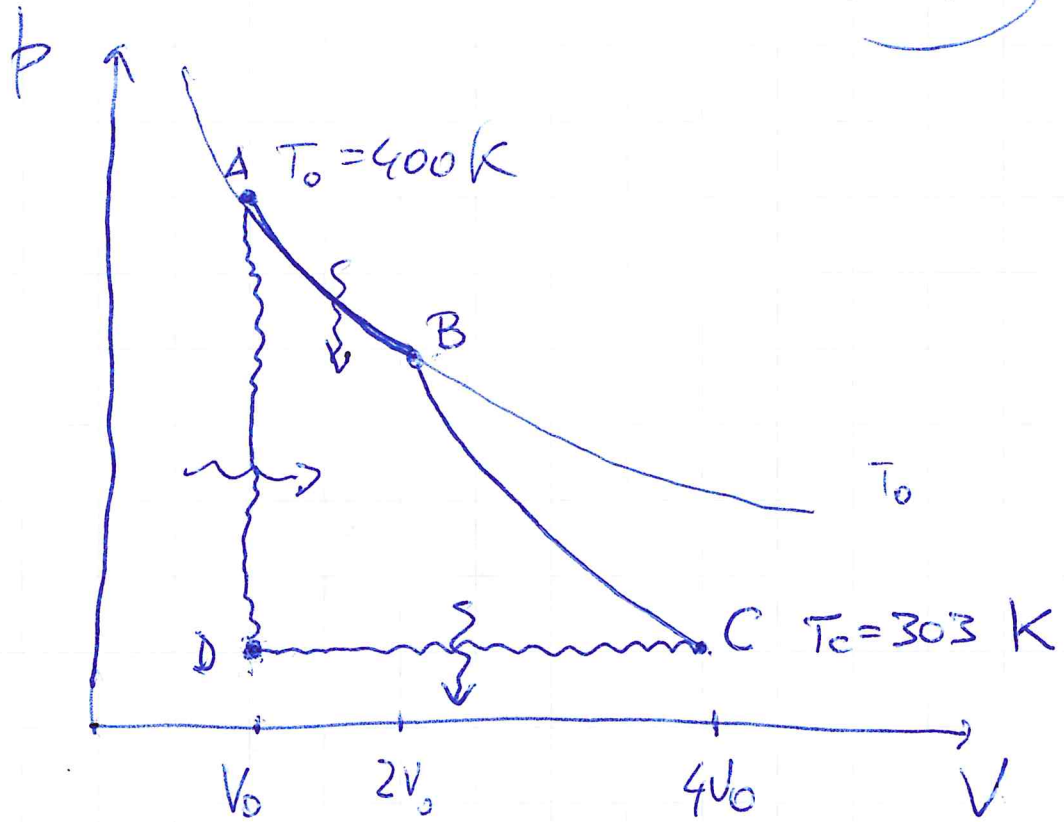


Ex 12



$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = nRT_0 \ln 2$$

$$Q_{BC} = \phi$$

$$Q_{CD} = ?$$

$$Q_{DA} = nC_V(T_A - T_D)$$

$\eta \geq 0$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{AAS}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}}$$

$$Q_{CD} = -(Q_{AB} + Q_{DA})$$

$$Q_{AB} = 3 \times 8.314 \text{ J/K} \times 400 \times \ln 2 = 6916$$

$$Q_{DA} = 3 \times \frac{5}{2} R \cdot (T_A - T_D)$$

$$T_B = T_A$$

$$V_B = 2V_0$$

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$V_C = 4V_0$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

Poisson

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 400 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma-1} = 303 \text{ K}$$

$$\frac{T_D}{V_0} = \frac{T_C}{4V_0} = T_D = \frac{1}{4} T_C \approx 76 \text{ K}$$

$$Q_{DA} = 3 \times \frac{5}{2} R \cdot (T_A - T_D) = 3 \times \frac{5}{2} \times 8.3145 \times (400 - 76) \\ \approx 20200 \text{ J}$$

$$Q_{CD} = -(Q_{AB} + Q_{DA}) = -(6916 + 20200) \\ \approx -27120 \text{ J}$$

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{ATP}}^{A \rightarrow B} + \Delta S_{\text{ATP}}^{(C \rightarrow D)} + \Delta S_{\text{ATP}}^{(D \rightarrow A)}$$

$$= -\Delta S_{\text{SIS}}^{(AD)} + \frac{27120}{T_C} + \frac{20200}{T_A}$$

$$\approx -17 + 357 - 50 = 290 \text{ J/K}$$

Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
23 gennaio 2020

Esercizio n.1

Un sistema composto da 2 moli di gas perfetto monoatomico, occupa un volume iniziale di 20 litri e compie il ciclo composto da:

- trasformazione politropica pV^2 fino alla pressione atmosferica, con una variazione di Entalpia di -5000 J;
- compressione isoterma reversibile fino al volume iniziale;
- il ciclo viene chiuso ponendo il sistema in contatto con il serbatoio alla temperatura iniziale.

Calcolare il rendimento del ciclo, la variazione di entropia dell'universo ed il rendimento di una macchina di Carnot che operi fra le temperature minima e massima raggiunte dal ciclo.

Soluzione

Il ciclo si compone di un'espansione politropica, una compressione isoterma ed una isocora irreversibile a chiudere il ciclo, come indicato in fig.1. Non conosciamo lo stato termodinamico iniziale in quanto non sono note né la temperatura T_A , né la pressione p_A . Per poter risolvere questo esercizio, utilizziamo le equazioni di stato nei punti in A ed in B e le due relazioni indicate nel testo e che mettiamo a sistema:

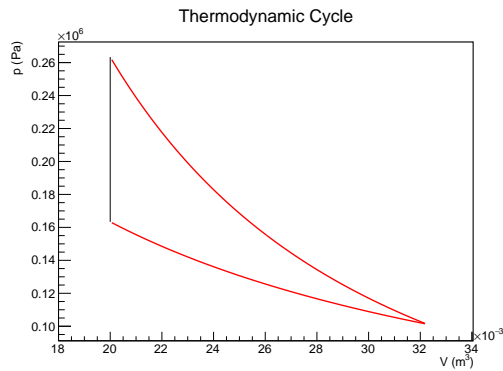


Figura 1: Esercizio 1

$$\begin{cases} p_A V_A = nRT_A & \text{EoS} \\ p_B V_B = nRT_B & \text{EoS} \\ p_A V_A^\alpha = p_B V_B^\alpha & \text{politropica} \\ \Delta H = nc_p(T_B - T_A) & \text{variazione di Entalpia} \end{cases}$$

Utilizzando l'Equazione di Stato, ed essendo $\alpha = 2$, possiamo riscrivere le equazioni come

$$\begin{cases} T_A V_A = T_B \frac{nRT_B}{p_B} \\ T_B - T_A = \frac{\Delta H}{nc_p} \end{cases}$$

con le uniche incognite T_A e T_B . Riarrangiamo le equazioni

$$\begin{cases} T_A = \frac{nRT_B^2}{p_B V_A} \\ T_A = T_B - \frac{\Delta H}{nc_p} \end{cases}$$

Eliminando T_A si ricava l'equazione di secondo grado con una sola incognita $x = T_B$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con

$$\begin{cases} a = n^2 R c_p \\ b = -n c_p p_B V_A \\ c = p_B V_A \Delta H \end{cases}$$

che pertanto prevede due possibili soluzioni di cui una delle due non fisica (temperatura minore di zero):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow T_B = 196 \text{ K}$$

e conseguentemente $T_A = 317 \text{ K}$. Ora dobbiamo solo proseguire nei calcoli. Calcoliamo il calore scambiato durante l'espansione politropica. Troviamo

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1 - \alpha} = 4.16 \text{ J/mol/K}$$

da cui si ricava

$$Q_{AB} = n c_\alpha (T_B - T_A) = -1000 \text{ J}$$

La seconda trasformazione è una compressione isoterma per cui

$$Q_{BC} = L_{BC} = n R T_B \log \frac{V_A}{V_B} = -1560 \text{ J}$$

e la terza trasformazione, che chiude il ciclo, è un'isocora irreversibile

$$Q_{CA} = n c_V (T_A - T_B) = 3000 \text{ J}$$

Ricaviamo immediatamente il rendimento

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{CA}} = 14.7\%$$

mentre l'equivalente rendimento della macchina di Carnot è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 38.0\%$$

Infine resta da calcolare la variazione di Entropia dell'Universo, che si fa per la sola trasformazione isocora irreversibile

$$\begin{aligned} \Delta S_U &= (\Delta S_{CA})_{amb} + (\Delta S_{CA})_{sis} \\ &= \frac{-Q_{CA}}{T_A} + n c_V \ln \frac{T_A}{T_C} = 2.44 \text{ J/K} \end{aligned}$$